

組織行動の最適制御

星野靖雄

組織行動の最適制御

星野靖雄

目次

はじめに	
第1節 制御されない組織	
第2節 制御される組織—寄生	
第3節 制御される組織—宿主	
第4節 制御される組織—寄生と宿主	
第5節 相互作用のある組織	
第6節 コスト曲線を含む位相図	
おわりに	

はじめに

現代社会は非常に大規模な組織—システムより成り立っている。この組織—システムの行動を記述、説明、予測し、さらには、人間自らが望む状態へと制御しようとすることが広く行なわれている。

しかしながら、現実には、組織—システムが人間の期待するように制御されるのは、多くの場合、特に社会組織—社会システムの場合は大変困難である。根本的には、個人としての人間行動、組織人としての人間行動の相違、価値基準の違いが原因である。すなわち、組織というシステムと個人または集団というサブシステム、もしくは要素の矛盾対立である。

例えば、国家の経済政策は、本来国民全体というシステムのためのものであるべきだが、現実には特定の組織や企業、利害関係集団、圧力団体によって強く動かされる。これは真に、システムとサブシステムとの矛盾である。

このような矛盾をどのように解決、調整しシステムの参加者全員の満足、欲求を最大限に達成するか、どのように目的に向かって組織を制御するかは、現代社会の最大の問題である。

この組織行動を制御するために、制御理論が理論的には非常に有効である。従来、制御理論は工学の分野で数多く使用されてきたのみならず、社会科学の分野でも、特に近代経済学ではよく利用されてきている。

動的システムの制御、最適制御の、今後の自然、社会科学での重要性は、ますます増加するものといえる。

最適化の理論は、動的システムの制御のために用いられており、特にポントリャーギンの最大値原理は有名である。近年、ロケット軌道の最適な制御において、その有効性が立証されている。このことは、ロケットの軌道についての動的理論モデルが、ニュートンの運動の法則によって与えられているからである。

本論文の目的は、最適制御理論²⁾を組織の動学理論の建設のために使用し、組織行動の記述、説明、予測、制御というフレームワークを完備する方向へと前進することである。

組織行動の動学分析についての研究は、星野[7]がある。本研究はその延長上にあり、組織行動の最適制御という新しい概念を、前面に押し出すことに目的がある。

そこで、第1節において、制御されていない組織の動学的行動を、主として、寄生-宿主関係で分析を行ない、第2節以降で、最適制御理論を取り入れた組織行動の動学理論を呈示する。その際に、制御される組織が、組織の寄生、宿主、寄生と宿主の3通りの場合があるため、第2、3、4節は各々に対応して制御変数を選択した。

1 制御されない組織

今、時刻 t での寄生、宿主の組織のメンバー数を各々 $N_1(t)$, $N_2(t)$ とする。

すると、この組織は、2つの微分方程式で表現される。

$$\frac{dN_1}{dt} = f_1(N_1, N_2, t)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = f_2(N_1, N_2, t)$$

ここで f_1 , f_2 は各々、 N_1 , N_2 , t の関数である。

ボルテラ・ロトカ (Volterra-Lotka) 型のモデルを考えると上式は下のよくな特定の方程式系へと直すことができる。星野[7]

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2 \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \quad (2)$$

ここで、座標軸 N_1 , N_2 からなる平面を状態空間といい、状態空間において、時間とともに運動する (N_1, N_2) の軌跡を表現する図を位相図という。

位相図においては、 $\frac{dN_1}{dt} = 0$,

$\frac{dN_2}{dt} = 0$ とおいた場合の座標

$(N_1, N_2) = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$ が

均衡点になり、初期値が位相図のどこにあっても P へ収束し安定であることがわかる。

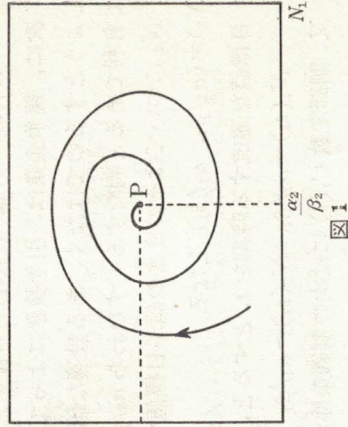


図1

2 制御される組織——寄生

ここでは、我々は、組織行動を制御するという目的があるため、前節における2つの状態変数 N_1 と N_2 以外に第3の変数である制御変数 $C_1(t)$ を導入する。この制御変数は、前節での均衡している組織に対して、外から状態変数 N_1 に負の影響を与えるものであるとする。例えば、競争企業からの自己の組織のメンバー、従業員に対しての「引き抜き」が功を奏して、従業員数が減りつつある場合等はこれに属する。すなわち、競争企業の引き抜きの努力は、最初の企業の組織行動を制御する変数となりうるのである。もちろんそれがどの程度うまくいくかは、制御変数である「引き抜きの努力」の値のとり方に依存する。

この制御変数 $C_1(t)$ の導入によって、第1節の微分方程式系は以下のような型に変わる。

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 - C_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2 \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$$

ここで、時刻 t_0 を初期時刻としその時の N_1 と N_2 のとる値を下のように定める。

$$N_1(t_0) = N_{10}, N_2(t_0) = N_{20}$$

次に、競争企業は、引き抜きによって、最初の企業の従業員数 N_1 を 0 にしようとするのではなく、ある最適な値 α_2/β_2 にするのが、競争企業にとつて有利であると判断する。すなわち α_2/β_2 は目標値であるとする。

N_2 についてはそのままの値が目標値であるとする。すると目標値 (N_1, N_2) = $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$ となる。

目標値を達成する時刻を t_e とすると、

$$N_1(t_e) = \alpha_2/\beta_2, N_2(t_e) = \alpha_1/\beta_1$$

又、制御変数 $C_1(t)$ には次の制御条件がつくものとする。 $0 \leq C_1(t) \leq C_{1max}$ 引き抜きの努力 $C_1(t)$ は当然正でなければならず、その値も無限というわけにはいかなく、現実の引き抜きに投下できる人数とか費用、設備の面で制約があるので、その最大値を C_{1max} と示す。

この制御問題を解くには、評価関数を導入する必要があり、コスト関数を評価関数として使う。引き抜きに必要なコストは制御変数 $C_1(t)$ に比例して増加すると考え、引き抜きの対象となる従業員数 N_1 にも比例すると仮定する。すると評価関数 J はコスト関数であり、

$$J = \int_{t_0}^{t_e} \{aC_1(t) + bN_1(t)\} dt$$

ここで a, b は定数であり正または 0 とする。

以上のことを整理して書き直す。

システム

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 - C_1 N_1 \tag{3}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2 \tag{4}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0, C \geq 0$$

$$\text{初期条件 } N_1(t_0) = N_{10}, N_2(t_0) = N_{20} \tag{5}$$

$$\text{終端 } N_1(t_e) = \alpha_2/\beta_2, N_2(t_e) = \alpha_1/\beta_1 \tag{6}$$

$$\text{制約 } 0 \leq C_1 \leq C_{1max} \tag{7}$$

$$\text{評価関数 } J = \int_{t_0}^{t_e} \{aC_1(t) + bN_1(t)\} dt \tag{8}$$

$a, b \geq 0$ を最小化する

N : 状態変数, C_1 : 制御変数

ここで、最適制御の理論を応用して以下のような解析を行なう。

ハミルトニアン関数 H は

$$H(N, C_1, \lambda, t) = (\alpha C_1 + bN_1) + \lambda_1 \{(\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 - C_1 N_1\} + \lambda_2 \{(\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2\}$$

ここで、 λ_1, λ_2 は補助変数である。

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -b - \lambda_1(\alpha_1 - \beta_1 N_2 - C_1) - \lambda_2 \beta_2 N_2 \tag{9}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = \lambda_1 \beta_1 N_1 - \lambda_2(\beta_2 N_1 - \alpha_2) \tag{10}$$

$$\dot{N}_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)N_1 - C_1 N_1 \tag{11}$$

$$\dot{N}_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2)N_2 \tag{12}$$

上述の(9)、(10)、(11)、(12)の連立微分方程式の解はパラメーターに特定の値を入れることにより、位相図を使って示すことができるが、解析的には解けない⁴⁾。

評価関数の中に入っている2つのパラメーター a と b が等しいという条件をつけて計算したものが図2である。

図2において、目標値 P へ直接に入っている曲線 AP はスウィッチング曲線 (Switching curve), BP は準収束線 (Semi-attractive curve) と呼ばれる。これらの曲線にベクトル線が入ってくるとそこから方向が急に転回するようになる。スウィッチング曲線は、ベクトル線の方向がその曲線に達すると変化する曲線のことであり、準収束線はその曲線に到達するとベクトル線が収束点 (均

衡点)に移動する曲線である。

例えば、もし初期値が G_1 の状態にあるとすると、この点からベクトル線に沿って曲線 PB に到達するまで進行し、曲線 PB に到達してからは方向を急転し、曲線 PB の上を目標値 P に向かって移動するようになる。 G_1 から曲線 PB までには制御されていないが、PB 上は目標値に向かって制御される。この制御されるということが、前節の制御されていない組織行動と決定的に相違しているのである。

もし初期値が G_2 であれば、制御変数の働きでベクトル線に沿って曲線 A P に移動し、ここに到達すると、制御される方向が変化し、 G_1 の方向へ移動し、後は G_1 と同様に BP 曲線に到着して均衡点 P に移動する。

$C_1=0$, $C_2=1$ という数値を入れた場合の位相図は図3のようになる。この図では、曲線 A B C D 上に初期値があるとき制御されて目標値 P へ AP の曲線に沿って移動する。

それより内側の曲線に初期値が位置している場合も、同様に AP 曲線に沿って P に移動する。

3 制御される組織——宿主

次に前節とは逆に、宿主の方に対して外から負の影響がある場合を考察しよう。前の例と同じようなことを考えるならば、競争企業から、最初の企業の宿主である企業の株主、もしくは取締役会のメンバーである役員に対しての株の売却や、引き抜きを勧誘することが、これに相当する。この勧誘を表す変数を C_2 とする。これが制御変数であり、 $0 \leq C_2(t) \leq C_{2max}$ を満た

すとする。

すとの新しいシステムの微分方程式系は次のようになる。

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 \quad (13)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2 - C_2 N_2 \quad (14)$$

初期条件は

$$N_1(t_0) = N_{10}, \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (15)$$

終端条件は

$$N_1(t_e) = \alpha_2 / \beta_2, \quad N_2(t_e) = \alpha_1 / \beta_1 \quad (16)$$

コスト関数である評価関数は、

$$J = \int_{t_0}^{t_e} \{ a C_2(t) + b N_2(t) \} dt \quad (17)$$

$$a, b > 0$$

であり、これを最小にするように、初期値から目標値 (α_2/β_2 , α_1/β_1) に向かって、制御関数 $C_2(t)$ で制御する。

前節と同様にハミルトン関数は、

$$H(N, C_2, \lambda, t)$$

$$= (a C_2 + b N_2) + \lambda_1 \{ (\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 \} + \lambda_2 \{ (\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2 - C_2 N_2 \}$$

λ_1, λ_2 は補助変数

$$\dot{\lambda}_1 = - \frac{\partial H}{\partial N_1} = - \lambda_1 (\alpha_1 - \beta_1 N_2) - \lambda_2 \beta_2 N_2 \quad (18)$$

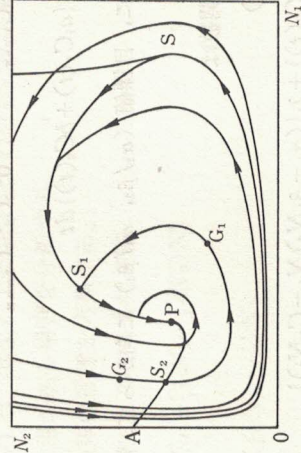


図4

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = -b + \lambda_1 \beta_1 N_1 - \lambda_2 (\beta_2 N_1 - \alpha_2 - C_2) \quad (19)$$

コスト関数を最小化するようなアドミッシブル制御は、 $a=1, b=1, C_2^{\max}=1$ とすると図4のようになる。

図4では、スイッチング曲線がAPであり、準収束線がPSである。もし初期値が G_1 にあれば、制御なしにPS曲線まで移動し、そこからはPS曲線に沿って目標値に到着する。

もし初期値が G_2 ならば制御されてAP曲線まで行き、そこから制御変数が変わりAP曲線に沿ってPに移行することになる。

4 制御される組織——宿主と寄生

第2, 3節での外部からの各々、宿主と寄生のメンバーに対する負の影響が同時に起こる場合を本節で考えることにする。

すると、微分方程式系は次のようになる。

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 - C_1 N_1 \quad (20)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2 - C_2 N_2 \quad (21)$$

$$\text{また, } N_1(t_0) = N_{10} \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (22)$$

$$N_1(t_e) = \alpha_2 / \beta_2 \quad N_2(t_e) = \alpha_1 / \beta_1 \quad (23)$$

$$0 \leq C_1 \leq C_{1\max} \quad 0 \leq C_2 \leq C_{2\max} \quad (24)$$

$$\text{評価関数 } J = \int_{t_0}^{t_e} \{a_1 C_1(t) + b C_2(t)\} dt \quad (25)$$

を最小化するように、目標値 $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$ に向かって、制御関数 $C_1(t), C_2(t)$ を求める。

ハミルトニアン関数は

$$\begin{aligned} H(N, C, \lambda, t) &= \{a_1 C_1(t) + b C_2(t)\} + \lambda_1 \{(\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 - C_1 N_1\} \\ &\quad + \lambda_2 \{(\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2 - C_2 N_2\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -\lambda_1 \{(\alpha_1 - \beta_1 N_2) - C_1\} - \lambda_2 \beta_2 N_2 \quad (27)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = +\lambda_1 \beta_1 N_1 - \lambda_2 \{(\beta_2 N_1 - \alpha_2) - C_2\} \quad (28)$$

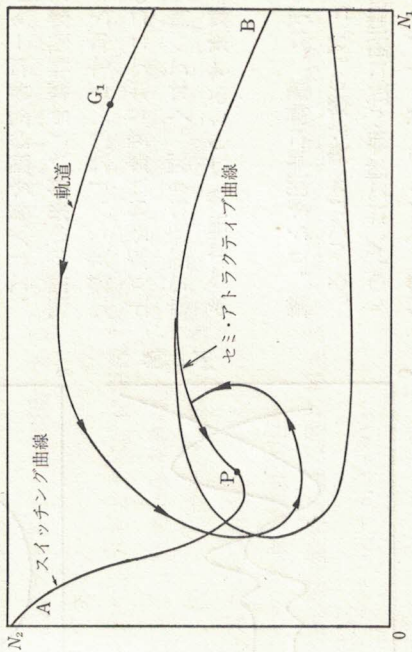


図5

(20), (21), (28) の連立微分方程式を解析的に解くことは不可能であるが、ここでは解の特性を調べるのが目的であるので、位相図を図5で示す。

初期値が G_1 であれば、スイッチング曲線APに向かって図のような軌道で移動し、AP到達後はBPへ移動し、そこで均衡点Pに収束する。

5 相互作用のある組織

次に、宿主が1つ、寄生が1つの今までの分析の拡張形態として、3つの組織間の相互作用がある場合を分析する。

そこで、3種類の形態を考察する。

- 1) 1つの宿主と2つの寄生組織

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2 - \gamma_1 N_3) N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 N_1 - \alpha_2) N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = (\gamma_2 N_2 - \alpha_3) N_3$$

ここで、 N_1 が宿主、 N_2, N_3 が寄生組織である。

上述の3元連立微分方程式は、解析的に解くことは大変困難であるので、パラメーターに特定の値を導入して、計算機で数値計算をした結果の位相図に示すことにする。ただし、3変数であるためここでは2変数だけを取り上げた図を書いておく。図6は安定であり、Pに収束するような位相図である。

図6の下は、横軸に時間とり、縦軸に N_1 と N_2 の数を表示している。 $t=0$ の初期値に近い時刻では N_1 のメンバーは少なく、 N_2 のメンバー数はそれに比較して多いけれども、時間が経過するにつれて振動をして、各々安定値へ収束する。安定値では N_1 と N_2 の値の大きさが逆で、 N_1 の目標値 N_{1p} が N_2 の目標値 N_{2p} より大である。

- 2) 2つの宿主と1つの寄生組織

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_3) N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\alpha_2 - \beta_2 N_3) N_2$$

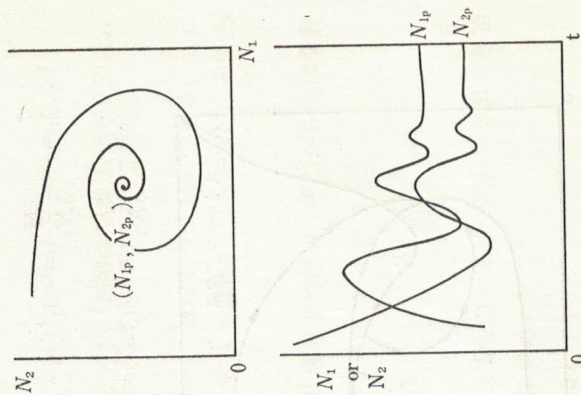


図6

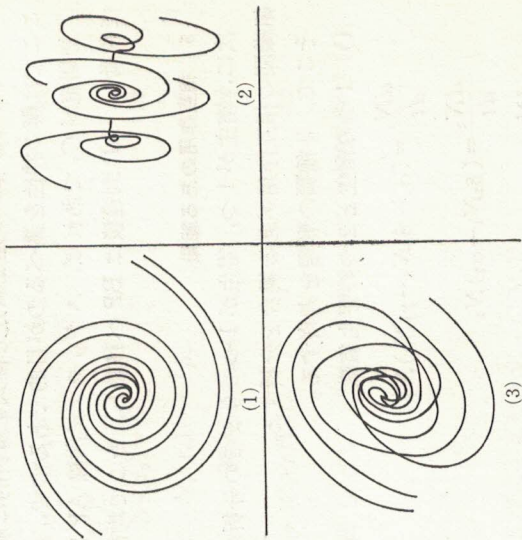


図7

$$\frac{dN_3}{dt} = (\beta_3 N_1 + \alpha_3 N_2 - \gamma) N_3$$

連立微分方程式は上のように考察できる。これを満足するような立体的な位相図はいくつかあることが知られている。その中でも特に、1)の場合と類似の位相図を示す。

これが図7であるが、立体図であるため、製図の第1角法の描き方を採用して示してある。

図7—(1)でわかるように、位相図は星雲のような形態をしている。これが正面図である。左側からみれば、図7—(2)のように構造が3層になっている。平面図は、図7—(3)でわかる如く、各層の構成は2曲線で表示されており各層のからみ合いがある。

- 3) 3つの集合の相互依存

3つの組織内集合が循環的に相互依存する場合の定式化は次のようである。

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_3) N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\alpha_2 - \beta_2 N_1) N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = (\alpha_3 - \beta_3 N_2) N_3$$

この連立微分方程式系の安定性の議論は星野 [7] で既にされているのでここでは略す。

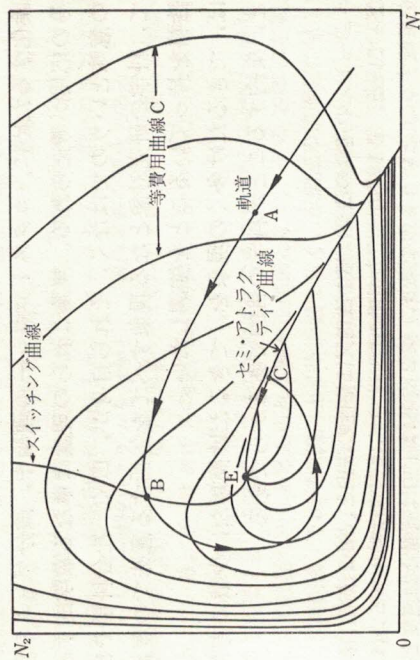


図8

6 コスト曲線を含む位相図

前節までは、コストを最小化することが目的であったが、そのコストがどういう値をとっているかについては明示されていないかった。

そこで、この節では、コストを表現している曲線、コスト曲線を位相図に示して、それと、最適制御される軌跡とを合わせて考察する。

図8で、C曲線が等費用曲線であり、同一曲線上の点におけるコストは、どこでも同じ値となる。また、コスト曲線は、均衡点を中心とし、その周囲に、距離が遠くなるにつれて高い値をとるといえる。

最適制御される軌道は、このコスト曲線群を横切って均衡点に移動するようになる。

おわりに

社会科学の分野で最大値原理が使われたのは、近代経済学が最初であった。線型の目的関数族で記述される1部門の最適消費問題や、非線型の目的関数での2部門成長モデル等は、応用分野として有意義である。Shell [14]

これに対して、組織論の分野においては、数理的手法、計量的手法の応用はまだあまり研究されていないのが現状である。厳密な意味での科学を成立させるには、今後とも、このような方向での研究は非常に重要であると考えられる。組織論 Organization Theory から組織科学 Organizational Science への飛躍の方向として、今後は、組織行動を全体的、統一的に定式化し、理論化するために、カタストロフィーの理論や、微分ゲームの理論、統計力学等の応用が考えられる。無論これらの理論は単なる数学的手段や技法としての意味というのではなく、それら自身が、広く、社会科学や自然科学を含めて、科学の研究対象となる現象すべてを包括する意味での理論の基礎となる性格を持っていることを強調したい。

いわば、できるだけ多くの現象を、できるだけ簡単な、少数の方程式体型、理論へと、集約することが科学の目的であるからである。

注

- 1) ニュートンの運動の法則は第1法則又は慣性の法則と、第2法則、第3法則よりなりなっている。第1法則は「力が働かないときには質点は静止あるいは等速度運動を継続する。」というものであり、第2法則は「力は質量と加速度との積に等しい。」とするもので、 $F = ma$ (m : 質量, a : 加速度) と表現される。第3

法則は、2つの物体が互に力を及ぼし合うとき、この2つの力の大きさは常に等しく、逆向きである。小谷[9]

力 F を3次元空間の直角座標 x, y, z に分解し、各々 X, Y, Z とする。

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \alpha_x$$

$$Y = m \frac{d^2y}{dt^2} = m \alpha_y$$

$$Z = m \frac{d^2z}{dt^2} = m \alpha_z$$

(v は速度, v, α の添字は座標軸)

これに対して、質点の速度 v が光速 c に近づくと、A. アインシュタインの特殊相対性理論での光速不変の仮定より以下の結論が導かれる。[3]

2つの質点の時間 t を入れた4次元座標を各々、 $P(x, y, z, t), P'(x', y', z', t')$ とし、 P' の P に対する速度を v とし x 方向へ運動しているとすると、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

である。この変換をローレンツ変換という。

2) 最適制御の理論は、ポントリャーギン、ボルチャンスキー、ガルクルーゼ、ミシェンコの最大値原理 [12] とベルマンのダイナミック・プログラミングが有名である。[1]

3) 制御はコントロールということであるが、通常、組織論でコントロールという言葉は、個人、グループ、組織が他の個人、グループ、組織の行動を決定する。すなわち、意図的に影響することを意味する。Tannenbaum [17] しかしながら、この論文では、制御理論におけるコントロールであり、用語の使用は狭義の意味であり、人間-機械システムを対象として操作可能な概念である。

4) Shimazu [15] では、電子計算機で、 $X-Y$ プロッターを使い5種類の立体図を描いている。2) のタイプの連立微分方程式は5つの異なる構造の空間図形があることがわかっていて。

5) 第1角法とは、製図で、立体の射影図法の1つである。一方向で物体の特徴を最もよく表現できると考えられる図を正面図として、その右側に左側面図、左側に右側面図、下に平面図、上に下面図をおく。正面図の前端部は第1角法では右側に配置される。これに対して、第3角法は、正面図を中心として、右側に右側面図、左側に左側面図、上に平面図、下に下面図をおく。正面図の前端部はすべて、正面図に対して内側を向くように配置される。原[6]

〈参考文献〉

- [1] Bellman, R. E., *Dynamic Programming*, Princeton Univ., 1957. 小田中敏
男他訳, *ダイナミック・プログラミング*, 東京図書, 1973.
- [2] Connors, M. M., and Teichrow, D., *Optimal Control of Dynamic Operations Research Models*, International Textbook, 1967.
- [3] Einstein, A., *The Principle of Relativity*, Dover, 1952.
- [4] Goh, B. S., Leitman, G., Vincent, T. L., *Optimal Control of a Prey-Predator System*, *Mathematical Biosciences* 19, 1974.
- [5] Haire, Mason ed., *Modern Organization Theory*, John Wiley & Sons, 1959.
- [6] 原正敏, 第3角法による板金属開法, 昭見堂, 昭和48年。
- [7] 星野靖雄, 組織の生態学的モデルについて——非線形動学モデルの諸類型と安定性——組織科学, Vol. 18, No. 4, 昭和49年12月。
- [8] Intrilligator, M. D., *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, 1971.
- [9] 小谷正雄編, 物理学概説 上, 裳華房, 昭和49年。
- [10] 大沢文夫, 寺本英編, 生命の物理, 岩波書店, 1972。
- [11] Pielou, E. C., *An Introduction to Mathematical Ecology*, John Wiley & Sons, 1969. 南雲仁一監訳, 数理生態学, 産業図書, 昭和49年。
- [12] Понтрягин, Л. С., В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ, Москва, 1961. 関根智明訳, 最適過程の数学的理論, 総合図書, 1973。
- [13] Rosen, R., *Dynamical System Theory in Biology*, Vol. 1, John Wiley & Sons, 1970. 山口・重宗・中島訳, 生物学におけるダイナミカル・システムの理論, 産業図書, 昭和50年。
- [14] Shell, K., Applications of Pontryagin's Maximum Principle to Economics, Beckman M., ed., *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics*, Springer, 1969 所収。
- [15] Shimazu, Y., Sugiyama, K., Kojima T., Tomida, E., Some Problems in Ecology Oriented Environmentalogy Terrestrial Environmentology II, *J. Earth. Sci.*, Nagoya Univ., Vol. 20, No. 1, 1972.
- [16] 島津康男, 岸保樹三郎, 高野建三, 自然の数理, 筑摩書房, 1975.
- [17] Tannenbaum, A. S., *Control in Organizations*, McGraw-Hill, 1968.
- [18] Vincent, T. L., Pest Management Programs Via Optimal Control Theory, *Biometrika*, 31, March 1975.
- [19] Volterra, V., *Lessson sur la Théorie Mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.